Kholles ECS 2, A : 21/09/2021

Robin Loris

Echauffement rapide :

Déterminer le rang de l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercices :

1. Soit E un -ev de dimension finie n. Soit $f \in L(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\{f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0)\}$.
   (a) Montrer que f est bijective.
   (b) montrer qu'il existe $(a_0, ..., a_{n-1}) \in^n$ tel que $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + ... + a_1 f + a_0 Id_E = 0$.
2. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $M \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ pour tout i, j. Montrer en utilisant le bon endormorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (développer $(X+1)^k$) que M est inversible et donner son inverse.
3. Quelles sont les matrices $A \in M_n()$ telles que $A^2 = 0$?
4. (Bonus) Soit E un -ev de dimension finie. Quel est l'ensemble des $f \in Gl(E)$ tels que $\forall g \in Gl(E)$, $fg = gf$?