Kholles 28/02/2022

1 Questions de cours

Discuter de la dérivabilité d'une série entière, en justifiant.

2 Exercices

1. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :
   (a) $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$
   (b) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$
   (c) $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n$
   (d) $\sum_{n\geqslant 0} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}) z^n$
2. (a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un " six " ?
   (b) Même question avec deux dés pour obtenir un " double-six ".
3. Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ln(n) x^n$$

   converge. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
   (a) Détermner I.
   (b) On pose

$$a_1 = -1 \; et \; a_n = -ln(1-\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \; pour \; n \geqslant 2$$

   Déterminer le domaine de définition de :

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

   (c) Trouver une relation entre f et g.
   (d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$
   (e) Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to -1^+$
4. (BONUS : demande un peu de notions de base sur l'espérance) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit S_n une VA suivant une loi binomiale de paramètres n et $x \in]0,1[$ et $X_n = \frac{S_n}{n}$.
   Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n. On admet que

$$\forall \alpha > 0, \;\; P(|X_n - x| > \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

(b) On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose $B_n(j)(x) = E(Y_n)$.
Vérifier que $B_n(f)(x)$ est une fonction polynôme en la variable x.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et M tel que

$$|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x))P(X_n = \frac{k}{n})| \leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}$$

et

$$|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x))P(X_n = \frac{k}{n})| \leqslant \varepsilon$$

(c) Conclure sur une démonstration probabiliste du théorème de Stone Weierstrass.