Kholles 28/03/2022

1 Exercices

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$sh(x)y' - ch(x)y = 1$$
2. Résoudre le système différenciel suivant : $x' = x - z$ et $y' = x + y + z$ et $z' = -x - y + z$.
3. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour chaque entier n, on note
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t} dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} dt.$$
   (a) Justifier que, pour tout $n \geq 0$, I_n et J_n sont bien définis.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n.
   (c) Soit $\phi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer, Ã l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin\big((2n+1)t\big) dt$ tend vers 0.
   (d) Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.
   (e) En déduire que $J_n - I_n \to 0$.
   (f) Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \to I$.
   (g) En déduire la valeur de I.
4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$. De même avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$
5. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :
   (a) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^n$
   (b) $\sum_{n \geqslant 0} z^{n^2}$
   (c) $\sum_{n \geqslant 0} sin(n) z^n$
   (d) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{sin(n)}{n^2} z^n$
6. Soit (f_n) la suite des fonctions donnée par
$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = (-1)^n ln(n) x^n$$
   (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$
   (b) Montrer que
$$\forall x \in]-1, 1[,\ S(x) = \frac{1}{1+x}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} ln(1 + \frac{1}{n}) x^{n+1}\Big)$$
   (c) En déduire que S admet une limite en 1^- et que :
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} ln(1 + \frac{1}{n})\Big)$$

(d) Calculer la limite ci-dessus en utilisant la formule suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1\times\ldots\times(2n-1)}{2\times\ldots\times 2n}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

7. Bonus : On considère l'équation différentielle.

$$(E) : y'' + cos^2(t)y = 0$$

(a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

(b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant $\alpha < 0 < \beta$, $u'(\alpha) > 0$ et $u'(\beta) < 0$.
En déduire que u possède au moins un séro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Justifier l'existence de réels $\gamma = max\{t < 0 | \, u(t) = 0\}$ et $\delta = \{t > 0 | \, ut) = 0\}$.

(d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u. En étudiant les variations de $W = uv' - u'v$, montrer que v possède un zéro dans $]\delta, \gamma[$.

(e) Soit w une solution non nulle de (E), démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction

$$w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$