Kholles MP : 27/09/21
Sujet C

Robin Loris

1 Questions de cours

Énoncer et démontrer le théorème de convergence séries intégrales.

2 Exercices

1. Nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{e - (1+\frac{1}{n})^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n}$$

2. Calculer pour $x \in]-1;1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

3. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

   (a) On suppose que la série $\sum a_n$ converge, donner la nature de $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$.

   (b) On suppose que la série $\sum a_n$ diverge, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\frac{a_n}{S_n^2} \leqslant \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

   En déduire la nature de $\sum \dfrac{a_n}{S_n^2}$

   (c) On suppose toujours la divergence de la série $\sum a_n$. Quelle est la nature $\sum a_n/S_n$?

4. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}}$$

   Discuter la nature de la série de terme général u_n.

5. (bonus) On note a_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'netier $n \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ y-a-t-il convergence de la série

$$\sum \frac{x^{a_n}}{n^3}$$