

# Kholles 24/01/2022

## 1 Questions de cours

Énoncer (en justifiant) la réduction des endomorphismes symétriques.

## 2 Exercices

- Soit  $E$  le sous espace vectoriel de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  où  $e_1$  est la fonction constante égale à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $e_2$  est la fonction  $t \mapsto \cos(2\pi t)$  et  $e_3$  est la fonction  $t \mapsto \sin(2\pi t)$ .
  - Montrer que  $\Phi : (f, g) \mapsto 2 \int_0^1 f(t)g(t) dt$  est un produit scalaire sur  $E$ .
  - Montrer que  $B = (e_1, e_2, e_3)$  est une base orthonormée de  $E$ .
  - Pour tout réel  $x$ , on définit l'application  $\tau_x$  qui à tout élément  $f$  de  $E$  associe  $g = \tau_x(f)$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(x-t)$ .
    - Montrer que  $\tau_x$  est un endomorphisme de  $E$  et donner sa matrice relativement à  $B$ .
    - Montrer que  $\tau_x$  est un automorphisme orthogonal de  $E$ .
    - Caractériser géométriquement  $\tau_x$ .
- Soit  $X$  une matrice colonne réelle de taille  $n$ . Montrer que  ${}^tXX \in \mathbb{R}_+$  et que  ${}^tXX = 0 \Leftrightarrow X = 0$ .
  - Soit  $M$  une matrice antisymétrique réelle de taille  $n$ . Montrer que  $I_n + M$  est inversible.
  - On pose  $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ . Montrer que  $A$  est orthogonale.
- On considère un espace euclidien  $E$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de sa norme associée  $\|\cdot\|$ . On considère  $F$  un s.e.v. de  $E$  et  $p$  une projection sur  $F$ . On se propose de montrer que :  
 $p$  est une projection orthogonale si et seulement si  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .
  - Montrer que si  $p$  est une projection orthogonale alors  $\|p(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in E$ .
  - On suppose que  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  ne sont pas orthogonaux. Soit  $x$  un vecteur orthogonal à  $\text{Ker}(p)$  et n'appartenant pas à  $\text{Im}(p)$ . Que dire de  $\|p(x)\|$ ? Conclure.
- (BONUS) Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . On identifie les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^m$ ) aux matrices colonnes associées. On munit  $\mathbb{R}^m$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ) du produit scalaire  $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$  et on note  $\|\cdot\|$  la norme associée aussi bien dans  $\mathbb{R}^m$  que dans  $\mathbb{R}^n$ . On se donne  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathbb{R}^m$ . On pose  $E = \{\|AX - B\|^2, X \in \mathbb{R}^n\}$  et  $K = \text{inf}(E)$ .
  - Justifier l'existence de  $K$ .
  - On considère le système linéaire  $(S) : AX = B$ . On appelle pseudo-solution de  $S$  tout élément  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\|AY - B\|^2 = K$ . Montrer que si  $(S)$  admet une solution, les pseudo-solutions de  $(S)$  sont les solutions de  $(S)$ .
  - On associe à  $(S)$  le système  $(S') : {}^tAAX = {}^tAB$ . Montrer qu'un élément  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  est pseudo solution de  $(S)$  si et seulement si il est solution de  $(S')$ . (indice : regarder  $A(X - Y) + (AY - B)$ ).
  - Montrer que  $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$
  - Montrer que si  $\text{rg}(A) = n$  alors  $(S)$  admet une unique pseudo-solution.