Kholles 17/01/2022

1 Questions de cours

Énoncer (en justifiant) la classification des isométries de $\mathbb{R}^3$.

2 Exercices

1. Soit E le sous espace vectoriel de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par la famille (e_1,e_2,e_3) où e_1 est la fonction constante égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, e_2 est la fonction $t \mapsto cos(2\pi t)$ et e_3 est la fonction $t \mapsto sin(2\pi t)$.
   (a) Montrer que $\Phi : (f,g) \mapsto 2\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur E.
   (b) Montrer que $B = (e_1,e_2,e_3)$ est une base orthonormée de E.
   (c) Pour tout réel x, on définit l'application τ_x qui à tout élément f de E associe $g = \tau_x(f)$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(x-t)$.
      i. Montrer que τ_x est un endomorphisme de E et donner sa matrice relativement à B.
      ii. Montrer que τ_x est un automorphisme orthogonal de E.
      iii. Caractériser géométriquement τ_x.
2. (a) Soit X une matrice colonne réelle de taille n. Montrer que ${}^tXX \in \mathbb{R}_+$ et que ${}^tXX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
   (b) Soit M une matrice antisymétrique réelle de taille n. Montrer que $I_n + M$ est inversible.
   (c) On pose $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que A est orthogonale.
3. On considère un espace euclidien E muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et de sa norme associée $\|.\|$. On considère F un s.e.v. de E et p une projection sur F. On se propose de montrer que :
   p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
   (a) Montrer que si p est une projection orthogonale alors $\|p(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in E$.
   (b) On suppose que $Ker(p)$ et $Im(p)$ ne sont pas orthogonaux. Soit x un vecteur orthogonal à $Ker(p)$ et n'appartenant pas à $Im(p)$. Que dire de $\|p(x)\|$? Conclure.
4. (BONUS) Soient $m,n \in \mathbb{N}^*$. On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) aux matrices colonnes associées. On munit $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{R}^n$) du produit scalaire $\langle X,Y \rangle ={}^t XY$ et on note $\|.\|$ la norme associée aussi bien dans $\mathbb{R}^m$ que dans $\mathbb{R}^n$. On se donne $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^m$. On pose $E = \{\|AX - B\|^2, X \in \mathbb{R}^n\}$ et $K = inf(E)$.
   (a) Justifier l'existence de K.
   (b) On considère le système linéaire $(S) : AX = B$. On appelle pseudo-solution de S tout élément Y de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|AY - B\|^2 = K$. Montrer que si (S) admet une solution, les pseudo-solutions de (S) sont les solutions de (S).
   (c) On associe à (S) le système $(S') : {}^tAAX ={}^t AB$. Montrer qu'un élément Y de $\mathbb{R}^n$ est pseudo solution de (S) si et seulement si il est solution de (S').(indice : regarder $A(X-Y)+(AY-B)$).
   (d) Montrer que $rg({}^tAA) = rg(A)$
   (e) Montrer que si $rg(A) = n$ alors (S) admet une unique pseudo-solution.