Kholles 14/01/2022

1 Exercices

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$sh(x)y' - ch(x)y = 1$$

2. Résoudre,
$$y'' + 4y' + y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et minimal de A puis e^A et $e^A e^{tA}$.

4. Résoudre le système différenciel suivant : $x' = x - z$ et $y' = x + y + z$ et $z' = -x - y + z$.

5. Bonus : On considère l'équation différentielle.
$$(E) : y'' + cos^2(t)y = 0$$
   (a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
   (b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant $\alpha < 0 < \beta$, $u'(\alpha) > 0$ et $u'(\beta) < 0$.
   En déduire que u possède au moins un séro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Justifier l'existence de réels $\gamma = max\{t < 0 | \, u(t) = 0\}$ et $\delta = \{t > 0 | \, ut) = 0\}$.
   (d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u. En étudiant les variations de $W = uv' - u'v$, montrer que v possède un zéro dans $]\delta, \gamma[$.
   (e) Soit w une solution non nulle de (E), démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction
$$w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$