Kholles MP 10/01/2022

1 Question de cours

Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme caractéristique pour que l'endomorphisme soit diagonalisable.

2 Exercices

1. Déterminer les z complexes pour lesquels la matrice suivante est diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/z & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

2. on considère 3 suites réelles vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0), ces trois suites convergent elles ?

3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on définit $T(f) =]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

   (a) Montrer que la fonction $T(f)$ se prolonge par continuité en 0 et que T est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer les éléments propres de T.

4. (Bonus) Dans $\mathbb{C}$, montrer que la matrice suivante est diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & & \\ & n-1 & 0 & \dots & & \\ & \dots & \dots & \dots & n-1 & \\ & & & 2 & 0 & n \\ (0) & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en regardant un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.