Kholles 04/04/2022

1 Exercices

1. Donner précisément le théorème de dérivation sous l'intégrale.
2. Donner l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de f puis écrire $f(1)$ comme somme d'une série dans le cas où pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{sin(xt)}{e^t - 1}\,dt$$
3. Soit $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que :
$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 ln(n)}$$
4. (Bonus) Soient $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u, v : I \to \mathbb{R}$ continues. Montrer la continuité de la fonction
$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt$$