Kholles 29/03/2022

1 Exercices

1. On considère un réel strictement positif ainsi qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variable aléatoires définies sur un meêm espace probabilisé, indépendantes et qui suivent la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Quelle est la loi suivie par la variable S_n ? Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.
   (b) Soit $a > 0$. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} P(|\frac{S_n}{n} - x| \geqslant a) = 0$.
2. Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. En introduisant la variable aléatoire $Y = [\alpha(X-\mu)+\sigma]^2$, montrer que pour tout $\alpha > 0$, $P(X \geqslant \mu + \sigma\alpha) \leqslant \frac{1}{1+\alpha^2}$
3. Soit $(X_1,...,X_n)$ un n échantillon i.i.d. de loi uniforme sur $[0;\theta]$, où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \ et \ M_n = max(X_1,...,X_n)$$

   (a) Déterminer en fonction de $\bar{X}_n$ un estimateur sans biais de θ.
   (b) i. Justifier que M_n est une VA à densité et en donner une densité.
       ii. Déterminer en fonction de M_n un estimateur sans biais U_n de θ.
   (c) Les estimateurs T_n et U_n sont ils convergent ?
   (d) Qui de T_n et U_n est le meilleru estimateur de θ quand $n \to +\infty$?
4. (Bonus)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{-n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1 et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

1. Donner la loi de S_n, ainsi que son espérance et sa variance.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la variable aléatoire S_n.
3. En déduire, en appliquant le théorème de la limite centrée, $\lim_{n\to+\infty} u_n$.