Kholles 22/03/2022

1 Exercices

1. On considère un réel strictement positif ainsi qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variable aléatoires définies sur un meêm espace probabilisé, indépendantes et qui suivent la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) Quelle est la loi suivie par la variable S_n ? Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

   (b) Soit $a > 0$. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} P(|\frac{S_n}{n} - x| \geqslant a) = 0$.

2. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et suivant la même loi de Poisson de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\bar{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$ et $U_n = \sqrt{n}\frac{\bar{T}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

3. Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. En introduisant la variable aléatoire $Y = [\alpha(X-\mu)+\sigma]^2$, montrer que pour tout $\alpha > 0$, $P(X \geqslant \mu + \sigma\alpha) \leqslant \frac{1}{1+\alpha^2}$

4. (Bonus) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{-n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}$.

   On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1 et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

   1. Donner la loi de S_n, ainsi que son espérance et sa variance.

   2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la variable aléatoire S_n.

   3. En déduire, en appliquant le théorème de la limite centrée, $\lim_{n\to+\infty} u_n$.