Kholles 18/01/2022

1 Exercices

1. HEC 2019 :

Dans l'exercice $(E, \langle \mid \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Question de cours : énoncer le théorème de réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

2. Soit f l'application de E dans E telle que pour tout x de E, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle e_k$.

a) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

b) Montrer que toutes les valeurs propres de f sont strictement positives et en déduire que f est bijectif.

3. Soit p un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_p$ des nombres réels deux à deux distincts.

Montrer que l'application θ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad \theta(P) = \big(P(x_1), \dots, P(x_p)\big)$$

est bijective.

4. a) Calculer, pour j, k entiers compris entre 1 et n, le produit scalaire $\langle e_k \mid f^{-1}(e_j)\rangle$.

b) Justifier l'existence d'un polynôme P tel que $g = P(f)$ vérifie $g \circ g = f^{-1}$.

c) Pour un tel endomorphisme g, montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base orthonormée de E.

2. (Bonus)

(a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

(b) Montrer que pour $n \neq 0$ et $x_1, ..., x_n > 0$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geqslant n^2$$

(c) En construisant le bon produit scalaire, déterminer le minimum de l'expression $\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2\,dt$.