Kholles : 12/10/21

Robin Loris

1 Exercices

1. Discuter de la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+(e^t)^2}\,dt \;\; et \;\; \int_0^1 \frac{1-cos(t)}{t^3}\,dt \;\; et \;\; \int_3^{+\infty} sin(t)\frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

2. Donner la nature et la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt \;\; et \;\; \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$$

   (la dernière par changement de variable $u=\sqrt{t}$)

3. Donner la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} sin(e^t)dt$ à l'aide d'une IPP.

4. Pour tout entier n non nul, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$.

   (a) Montrer que, quelque soit l'entier naturel n non nul, I_n converge.

   (b) Donner une relation de récurrence sur (I_n) et en déduire une valeur pour I_n en fonction de N.

5. Déterminer la nature de

$$\int_0^1 \frac{1}{(t^2-1)\sqrt{t+1}}$$

6. On considère lafonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=x^2cos(\dfrac{1}{x^2})$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

   Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ mais que sa dérivée n'est pas intégrable sur $]0,1]$. (on admettra que $\int_1^{+\infty}\dfrac{sin(x)}{x}\,dx$ diverge.)

7. (Bonus) Calculer, après avoir justifier son existence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ln(t)}{t^2+a^2}\,dt$$

   où $a>0$.

8. (Bonus) On considère une fonction positive et continue définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} = l \in]0;1[$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.