

# Kholles 11/01/2022

## 1 Exercices

1. Soit  $f$  l'application définie pour tous vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et  $y = (y_1, y_2, y_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  par  $f(x, y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$ . On notera désormais  $f(x, y) = \langle x, y \rangle$ .
  - (b) Montrer que  $e_1 = (1, 1, 1)$  et  $e_2 = (-3, -2, 3)$  forment une famille orthonormée pour ce produit scalaire. Comparer avec le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2[X]$ , on considère l'application  $g$  définie par  $g(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ . Montrer que  $g$  est un produit scalaire. On notera alors  $g(P, Q) = \langle P, Q \rangle$ .  
Calculer  $\langle X^i, X^j \rangle$  pour  $i, j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ . En déduire que la famille  $(1, X, X^2 - \frac{2}{3})$  est orthogonale.  
Montrer que  $F = \text{Vect}(1 + X, 1 - X)$  et  $G = \text{Vect}(X - X^2)$  sont orthogonaux.
3. (Bonus)
  - (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

- (b) Montrer que pour  $n \neq 0$  et  $x_1, \dots, x_n > 0$  :

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq n^2$$

- (c) En construisant le bon produit scalaire, déterminer le minimum de l'expression  $\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$ .