

Kholles 08/03/2022

1 Exercices

1. Pour chacune des fonctions suivantes, justifier que f est C^1 et donner le gradient de f :

— La fonction f est définie sur \mathbb{R}^3 par $f(x, y, z) = \frac{x^2 + z^2}{1 + y^2}$

— La fonction f est définie sur \mathbb{R}^3 par $f(x, y, z) = \frac{xz^2}{e^x + e^y}$

— La fonction f est définie sur $(\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{R}$ par $f(x, y, z) = \frac{\exp(z^2)}{xy}$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Décrire la forme quadratique associée à A : expression, signe, définition.

3. Étudier les extremums de la fonction f définie sur \mathbb{R}^3 par $f(x, y, z) = x^2y + z^2 - yz + 2y$.

4. Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 et la fonction F définie par $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Montrer pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{dF}{dx}(x, y, z) + \frac{dF}{dy}(x, y, z) + \frac{dF}{dz}(x, y, z) = 0$.

5. Soit A la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $A(x, y) = 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3$. Étudier les extremums de A (on pourra regarder le signe de $A(x, x)$ et de $A(x, -x)$).