Kholles 08/02/2022

1 Exercices

1. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on note $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ définie par $a_{i,j} =< e_i, e_j >$.
   (a) Vérifier que A est une matrice symétrique réelle.
   (b) On note q la forme quadratique associée à A. Montrer que pour tout x non nul, $q(x) > 0$.
2. Étudier les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2y + z^2 - yz + 2y$.
3. On désigne par n un entier naturel non nul, et on considère 2 réels A et S, positifs ou nuls, vérifiant $S \geqslant nA$. On définit sur $[0, +\infty[\times]0; +\infty[$ la fonction L_n par :

$$\begin{cases} L_n(a,b) = \dfrac{1}{b^n} e^{-1/b(-na+S)} & si \quad 0 \leqslant a \leqslant A \\ L_n(a,b) = 0 & si \quad a > A \end{cases}$$

   Justifier que L_n est de classe C^1 sur $]0, A[\times]0; +\infty[$. Montrer que L_n n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.
   Montrer que pour tout $b > 0$ et pour tout $a \in [0, A[$, $L_n(a,b) < L_n(A,b)$. Montrer que c résultat est encore vraie pour $a > A$.
   Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(b) = L_n(A,b)$. Montrer que g admet un extremum global atteint en b_0 que l'on exprimera en fonction de S, A et n.
   Montrer qu'alors L_n admet un maximum global sur $[0; +\infty[\times]0; +\infty[$.
4. Dans cet exercice, on utilisera une lettre minuscule pour un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la même lettre majuscule pour le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice telle que l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $\phi(x,y) =^t XAY$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Soit $b \in \mathbb{R}^n$, on définie l'application f par $f(x) = \frac{1}{2}^t XAX -^t BX$.
   Montrer que A est symétrique et que ses valeurs propres sont strictement positives.
   Étudier les extremums de f.
5. Montrer que l'intersection de k parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
6. (bonus) On désigne par α un réel strictement positif et on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$,à valeur dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
   (a) On suppose que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et pour tout réel $t > 0$, $f(tu) = t^\alpha f(u)$ (on dit que f est homogène de degré α).
      i. Soit $u = (u_1, ..., u_n)$ fixé dans $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction g sur $]0; +\infty[$ par $g(t) = f(tu)$.
      Justifier la dérivabilité de g sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $t > 0$, exprimer $g'(t)$ à l'aide des dérivées partielle de f.
      ii. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a : $\sum_{i=1}^{n} u_i \dfrac{df}{dx_i}(u) = \alpha f(u)$
   (b) On ne suppose que f est homogène mais on suppose désormais que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{df}{dx_i}(u) = \alpha f(u)$$

   Pour tout $u = (u_1, ..., u_n)$ fixé dans $\mathbb{R}^n$ on définie la fnction h sur $]0; +\infty[$ par

$$\forall t \in]0; +\infty[\ h(t) = f(tu) - t^\alpha f(u)$$

i. Montrer que pour tout réel $t > 0$, $h'(t) = \frac{\alpha}{t} h(t)$

ii. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{h(t)}{t^{\alpha}}$ est constante sur $]0;+\infty[$ et puis que h est nulle sur $]0;+\infty[$

iii. Conclure.