Kholles 07/03/2022

1 Question de cours.

Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n z_n$ et $\sum n a_n z_n$? Démontrer.

2 Exercices

1. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :
   (a) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^n$
   (b) $\sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}$
   (c) $\sum_{n\geqslant 0} sin(n) z^n$
   (d) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{sin(n)}{n^2} z^n$
2. Développer en série entière autour de 0 la fonction $x \mapsto ln(x^2+x+1)$.
3. Soit (f_n) la suite des fonctions donnée par
$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = (-1)^n ln(n) x^n$$
   (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$
   (b) Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} ln(1+\frac{1}{n}) x^{n+1}\right)$$
   (c) En déduire que S admet une limite en 1^- et que :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} ln(1+\frac{1}{n})\right)$$
   (d) Calculer la limite ci-dessus en utilisant la formule suivante :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1\times \ldots \times (2n-1)}{2\times \ldots \times 2n}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$
4. Soient $a, b, c > 0$ tel que $a \neq b$. Calculer c_n le $n$ème coefficient du développement en série entière en 0 de $x \mapsto \frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ puis exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n$.
5. (BONUS) Soit (a_n) une suite de réels stric positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose que $S_n \to +\infty$ et $\frac{a_n}{S_n} \to 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.