Kholles 28/09/2021

1 Exercices

1. On considère $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer les valeurs propres de A et déterminer les espace propres associés.
   (b) En déduire P inversible tel que $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale.
   (c) En déduire A^n.
   (d) On considère les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = & -4u_n + v_n \end{array} \right.$
   En utilisant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, exprimer u_n et v_n en fonction de n.
2. Donner la définition de A est diagonalisable.
3. Calculer A^k pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
4. On considère g l'application qui à toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + tr(M)J$ où J est une matrice non nulle de trace nulle.
   Montrer que $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de g. Est ce que g est diagonalisable ?
5. (bonus) : Soit $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i;j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui vérifier $\forall i \in [[1,n]]$, $|a_{i,i} > \sum\limits_{j=1\,,\,j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$.
   Montrer que A est inversible.