Kholles ECS 2, A : 21/09/2021

Robin Loris

Echauffement rapide :

Déterminer le rang de l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercices :

1. Soit E un -ev de dimension finie, soit $f \in L(E)$. Montrer l'équivalence :

$$E = Im(f) \oplus Ker(f) \Longleftrightarrow im(f) = im(f^2)$$

2. (a) Soit E est un ev de dimension n et de base $\{e_1, ..., e_n\}$. On pose $e_i : E \to$, $e_i(x) = e_i(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k) = \lambda_k$.
   Montrer que $e_i \in E^*$ pour tout $i \in [[1,n]]$, et que $\{e_i |\ i \in [[1,n]]\}$ est une base de E^*.
   (b) Soit $\phi_1, ..., \phi_p \in E^*$ et $\phi : E \to^p$ définie par $\phi = (\phi_1, ..., \phi_p)$. Montrer que ϕ est surjective si et seulement si $\phi_1, ..., \phi_p$ sont linéairement indépendantes.
3. Étudier la réduction de l'endormorphisme suivant :

$$\phi : \begin{cases} k_n[X] & \to & k_n[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{cases}$$

4. (Bonus) Soit E un -ev de dimension finie. Quel est l'ensemble des $f \in Gl(E)$ tels que $\forall g \in Gl(E)$, $fg = gf$?