Kholles 28/03/2022

1 Exercices

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$x^2y' - y = 0$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Calculer e^A
3. Résoudre le système différenciel suivant : $x' = 2x - y + 2z$ et $y' = 10x - 5y + 7z$ et $z' = 4x - 2y + 2z$
4. Existence et valeur de
$$I = \int_0^{+\infty} ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right)\, dt$$
5. Soit $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Montrer
$$\int_1^{+\infty} f(t)\, dt \ converge \ \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt \ converge$$
6. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} d(n)z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} s(n)z^n$ dans le cas où $d(n)$ est le nombre de diviseur de n et $s(n)$ la somme de ceux ci.
7. Soit (a_n) une suite de réels stric positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose que $S_n \to +\infty$ et $\frac{a_n}{S_n} \to 0$.
Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.
8. Bonus : On considère l'équation différentielle.
$$(E) : y'' + cos^2(t)y = 0$$
   (a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
   (b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant $\alpha < 0 < \beta$, $u'(\alpha) > 0$ et $u'(\beta) < 0$.
   En déduire que u possède au moins un séro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Justifier l'existence de réels $\gamma = max\{t < 0 |\, u(t) = 0\}$ et $\delta = \{t > 0 |\, ut) = 0\}$.
   (d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u. En étudiant les variations de $W = uv' - u'v$, montrer que v possède un zéro dans $]\delta, \gamma[$.
   (e) Soit w une solution non nulle de (E), démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction
$$w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$