Kholles 28/02/2022

1 Question de cours.

Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n z_n$ et $\sum n a_n z_n$? Démontrer.

2 Exercices

1. Un étudiant résout un QCM constitué de n questions offrant chacune quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre celle-ci. Dans ce cas il produit la bonne réponse. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu au hasard.
   (a) Reconnaître la loi de $Z = X + Y$.
   (b) Calculer espérance et variance de Z.
2. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :
   (a) $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^n$
   (b) $\sum\limits_{n \geqslant 0} z^{n^2}$
   (c) $\sum\limits_{n \geqslant 0} sin(n) z^n$
   (d) $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{sin(n)}{n^2} z^n$
3. Soit (f_n) la suite des fonctions donnée par
$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = (-1)^n ln(n) x^n$$
   (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$
   (b) Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} ln(1+\frac{1}{n}) x^{n+1}\right)$$
   (c) En déduire que S admet une limite en 1^- et que :
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} ln(1+\frac{1}{n})\right)$$
   (d) Calculer la limite ci-dessus en utilisant la formule suivante :
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times \ldots \times 2n} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$
4. (BONUS : demande un peu de notions de base sur l'espérance) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit S_n une VA suivant une loi binomiale de paramètres n et $x \in]0,1[$ et $X_n = \dfrac{S_n}{n}$.
Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n. On admet que

$$\forall \alpha > 0,\ \ P(|X_n - x| > \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

(b) On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose $B_n(j)(x) = E(Y_n)$.
Vérifier que $B_n(f)(x)$ est une fonction polynôme en la variable x.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et M tel que

$$|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x))P(X_n = \frac{k}{n})| \leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}$$

et

$$|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x))P(X_n = \frac{k}{n})| \leqslant \varepsilon$$

(c) Conclure sur une démonstration probabiliste du théorème de Stone Weierstrass.