Kholles MP : 27/09/21
Sujet B

Robin Loris

1 Questions de cours

Énoncer et démontrer le théroème de convergence sur les séries et les équivalences.

2 Exercices

1. Déterminer la nature de la série de teme général : $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$
2. En utilisant la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \ et \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$
   (a) Déterminer un équivalent de $ln(u_{n+1}) - ln(u_n)$. En déduire que $u_n \to 0$.
   (b) Montrer que $nu_n \to +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
   (c) On pose $v_n = \frac{v_n}{n+1}$. En observant et en sommant le égalités $(2k+4)v_{k+1} = (2k+1)v_k$ calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n et v_{n+1}. En déduire
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}$$
4. Soit $a \in]0,1[$. Détermner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} a^{\sqrt{n}}$.
5. (bonus) On note a_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier $n \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ y-a-t-il convergence de la série
$$\sum \frac{x^{a_n}}{n^3}$$