# Kholles 24/01/2022

## 1 Questions de cours

Expliquer le procéder d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

## 2 Exercices

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique.
   (a) Déterminer la matrice dans la base canonique de $E$ de la réflexion $s_1$ par rapport au plan d'équation $x+y-2z=0$
   (b) Quelle est la nature de l'endomorphisme $f$ de $E$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ?
   Donner ses éléments caractéristiques.
   (c) Montrer qu'il existe des réflexions $s_2$ et $s_3$ telles que $s_1 \circ s_2 = f$ et $s_3 \circ s_1 = f$ et les déterminer.
2. Soient $H$ et $K$ 2 hyperplans affines d'un espace euclidien $E$. On note $s_H$ et $s_K$ les symétries orthogonales par rapport à $H$ et $K$. Montrer que $s_H$ et $s_K$ commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.
3. $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orienté canonique. Que dire de deux rotations vectorielles qui commutent et qui n'ont pas le même axe ?
4. (BONUS) Soient $m,n \in \mathbb{N}^*$. On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) aux matrices colonnes associées. On munit $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{R}^n$) du produit scalaire $\langle X,Y\rangle =^t XY$ et on note $||.||$ la norme associée aussi bien dans $\mathbb{R}^m$ que dans $\mathbb{R}^n$. On se donne $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^m$. On pose $E = \{||AX-B||^2, X \in \mathbb{R}^n\}$ et $K = inf(E)$.
   (a) Justifier l'existence de $K$.
   (b) On considère le système linéaire $(S) : AX = B$. On appelle pseudo-solution de $S$ tout élément $Y$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $||AY-B||^2 = K$. Montrer que si $(S)$ admet une solution, les pseudo-solutions de $(S)$ sont les solutions de $(S)$.
   (c) On associe à $(S)$ le système $(S') : {}^tAAX =^t AB$. Montrer qu'un élément $Y$ de $\mathbb{R}^n$ est pseudo solution de $(S)$ si et seulement si il est solution de $(S')$.(indice : regarder $A(X-Y)+(AY-B)$).
   (d) Montrer que $rg({}^tAA) = rg(A)$
   (e) Montrer que si $rg(A) = n$ alors $(S)$ admet une unique pseudo-solution.