Kholles 14/01/2022

1 Exercices

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$(e^x-1)y'+e^xy=1$$

2. Résoudre,
$$y''+y=tan(t)$$

3. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Calculer e^A sans la diagonaliser mais en trouvant son polynôme minimal.

4. Résoudre le système différenciel suivant : $x'=2x-y+2z$ et $y'=10x-5y+7z$ et $z'=4x-2y+2z$

5. Bonus : On considère l'équation différentielle.
$$(E):y''+cos^2(t)y=0$$
   (a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0)=1$ et $u'(0)=0$.
   (b) Démontrer l'existence de deux réels α,β vérifiant $\alpha<0<\beta$, $u'(\alpha)>0$ et $u'(\beta)<0$.
   En déduire que u possède au moins un séro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Justifier l'existence de réels $\gamma=max\{t<0|\,u(t)=0\}$ et $\delta=\{t>0|\,ut)=0\}$.
   (d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u. En étudiant les variations de $W=uv'-u'v$, montrer que v possède un zéro dans $]\delta,\gamma[$.
   (e) Soit w une solution non nulle de (E), démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n\in\mathbb{N}$ la fonction
$$w_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},t\mapsto w(t-n\pi)$$