Kholles 13/12/21

1 Question de cours :

Donner et démontrer la formule pour le déterminnant d'une matrice triangulaire par blocs.

2 Exercices

1. On considère un entier $n \geqslant 2$, et n réels $x_i \in [0;\pi]$. De plus, on note P_n le polynôme :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (cos(x_j) - cos(x_i))$$

Ainsi que M_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de coefficients : $m_{ij} = (cos((j-1)(x_i))$.

   (a) Montrer que m_{ij} est un polynôme en $cos(x_i)$ dont on donnera le coefficient dominant.

   (b) Montrer que $det(M_n) = P_n$

2. Soit $e = (e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall f \in E^*, f(e_1) = ... = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0$$

Montrer que e est une base de E.

3. Soient $E_1, ..., E_n$ et $F_1, ..., F_n$ sous espaces vectoriels de E tel que $E_i \subset F_i$ et

$$\oplus_{i=1}^n E_i = \oplus_{i=1}^n F_i$$

Montrer que $E_i = F_i$.

4. Soit f un endormisphe de E, une espace vectoriel de dimension fini, tel que $f^2 = -Id$. Montrer que E est de dimension paire.
5. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Donner une relation entre $det(\bar{A})$ et $det(A)$.
6. (BONUS)

   (a) Soit f et g 2 applications d'un espace vectoriel E de dimension finie vers un espace vectoriel F de dimension finie. Montrer que :

$$|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$$

   (b) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. (On montrera l'existence des objets étudiés rapidement, puis on pourra étudier la suite de matrices $(A^k + A^{-k})_k$)