

Kholles 04/04/2022

1 Exercices

1. Donner précisément le théorème d'intégration terme à terme.
2. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2(t) + x \sin^2(t)) dt$$

Justifier que F est définie et C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$ et donner une expression de $F(x)$.

3. Montrer

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

4. (Bonus) Soient $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$$