

## Kholles 04/04/2022

### 1 Exercices

1. Donner précisément le théorème d'intégration terme à terme.
2. Pour  $x > 0$ , on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2(t) + x\sin^2(t)) dt$$

Justifier que  $F$  est définie et  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Calculer  $F'(x)$  pour tout  $x > 0$  et donner une expression de  $F(x)$ .

3. Montrer

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

4. (Bonus) Soient  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues. Montrer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$$