Kholles MPSI 19/09/2022, sujet B

1 Question de cours

Énoncer et démontrer le principe de récurrence.

2 Exercices

Exercice 1. *On rappelle ici que* $(\sum_{k=1}^{n} k)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit pour tout $i \in \mathbb{N}$, $S_i = \sum_{k=1}^{n} k^i$.

1. Exprimer S_0, S_1, S_2 et S_3 en fonction de n.
2. À l'aide du binôme de Newton, développer $(k+1)^5$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^5 - k^5 = 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0$
4. Exprimer alors S_4 en fonction de n.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les 3 sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k$
2. $\sum_{k=1}^{n} ln(1 + \frac{2}{k(k+3)}$
3. $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.

Exercice 3. Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose comme un produit de facteurs premiers.
Indice : On pourra, si besoin, utiliser le fait qu'un entier (au hasard $n+1$) est soit premier soit s'écrit comme un produit de deux entiers supérieurs ou égale à 2.

3 Une question de recherche

Exercice 4. Soient $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ deux familles de réels. On pose :

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \ , \ \beta = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \ et \ \gamma = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

On introduit aussi, $\forall x$, $P(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + x b_k)^2$.

1. Prouver que $\gamma^2 \leqslant \alpha\beta$ en utilisant le signe de P comme trinôme du second degré (vous trouverez ses coefficients).
2. En déduire que :

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \text{ et que } |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leqslant \sqrt{n} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$