

Kholles 25/01/2022

1 Exercices

- On considère un espace euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée B . On considère u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est u , et on appelle u^* l'adjoint de u qui est l'endomorphisme dont la matrice dans la base B est tM .
 - Soit $x \in E$ et $X = \text{Mat}_B(x)$, et $y \in E$ et $Y = \text{Mat}_B(y)$ montrer que $\langle x, y \rangle = {}^tXY$.
 - Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$
 - Soit v un endomorphisme de E tel que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$. Alors $v = u^*$.
 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $u^* = u$.
 - Soit F un sev de E stable par u . Montrer que F^\perp est stable par u^* .
- On considère E un espace euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée B . On dit que f est un endomorphisme orthogonal ssi f est un endomorphisme et pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
 - Soit f un endomorphisme orthogonal, montrer que f est bijectif et que f^{-1} est également orthogonal.
 - Montrer que la composée de 2 endomorphismes orthogonaux est encore orthogonale.
 - Montrer que si f est orthogonal et symétrique alors $f^2 = Id$.
 - Soit f un endomorphisme. Montrer que f est orthogonale si et seulement si pour tout $x \in E$ $\|f(x)\| = \|x\|$
 - Soit f un endomorphisme. Montrer que f est orthogonale si et seulement si f transforme toute base orthonormée en une autre base orthonormée.
 - Soit f un endomorphisme. Montrer que f est orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée quelconque est orthogonale.
- (Bonus)
 - Montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

- Montrer que pour $n \neq 0$ et $x_1, \dots, x_n > 0$:

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \geq n^2$$

- En construisant le bon produit scalaire, déterminer le minimum de l'expression $\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.