Kholles 22/03/2022

1 Exercices

1. Echauffement : Soit X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante. Montrer que pour tout $a \geqslant 0$, $P(|X| \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(g(|x|))}{g(a)}$.
   Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Montrer que pour tout $\lambda, \varepsilon > 0$:
   $$P(X - np > n\varepsilon) \leqslant E(exp(\lambda(X - np - n\varepsilon))$$

2. Oral HEC :

   Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire à densité, possédant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. Les autres variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que X.

   1. a) Question de cours : inégalité de Markov.

      b) Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

      i) Pour tout réel strictement positif b, justifier l'inégalité :
      $$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + b)^2\big)}{(a+b)^2}.$$

      ii) En appliquant le résultat précédent à $b = V(X)/a$, établir l'inégalité :
      $$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

   2. On appelle *médiane* de X tout nombre réel m tel que $P([X \leq m]) = \dfrac{1}{2}$.

      a) Justifier que X admet au moins une médiane et que l'ensemble des médianes de X est un segment de $\mathbb{R}$.

      b) Dans cette question, on note m une médiane de X et on suppose que m est supérieure ou égale à $E(X)$. On note $\sigma(X)$ l'écart-type de X.
      Déduire de l'inégalité prouvée en 1.b.ii, appliquée à $a = m - E(X)$, que $m - E(X)$ est inférieur ou égal à $\sigma(X)$.

      c) Justifier que toute médiane m de X vérifie l'inégalité : $\dfrac{|m - E(X)|}{\sigma(X)} \leq 1$.

   3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note X_n une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_n définie par :
      $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ n/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/\big(2(n-1)\big) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ (n-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

      a) Trouver l'unique médiane de X_n.

      b) Justifier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

      c) Quelle propriété du majorant trouvé en 2.c peut-on déduire des limites de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini ?

3. (Bonus)

   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{-n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}$.

   On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1 et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

   1. Donner la loi de S_n, ainsi que son espérance et sa variance.

   2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la variable aléatoire S_n.

   3. En déduire, en appliquant le théorème de la limite centrée, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.