

# Kholles 18/01/2022

## 1 Exercices

- On considère un espace euclidien de dimension  $n$  muni d'une base orthonormée  $B$ . On considère  $u$  un endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $B$  est  $u$ , et on appelle  $u^*$  l'adjoint de  $u$  qui est l'endomorphisme dont la matrice dans la base  $B$  est  ${}^tM$ .
  - Montrer que pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$
  - Soit  $v$  un endomorphisme de  $E$  tel que, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$ . Alors  $v = u^*$ .
  - Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $u$  pour que  $u^* = u$ .
  - Soit  $F$  un sev de  $E$  stable par  $u$ . Montrer que  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .
- On considère  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  muni d'une base orthonormée  $B$ . On dit que  $f$  est un endomorphisme orthogonal ssi  $f$  est un endomorphisme et pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ 
  - Soit  $f$  un endomorphisme orthogonal, montrer que  $f$  est bijectif et que  $f^{-1}$  est également orthogonal.
  - Montrer que la composée de 2 endomorphismes orthogonaux est encore orthogonale.
  - Montrer que si  $f$  est orthogonal et symétrique alors  $f^2 = Id$ .
  - Soit  $f$  un endomorphisme. Montrer que  $f$  est orthogonale si et seulement si pour tout  $x \in E$   $\|f(x)\| = \|x\|$
  - Soit  $f$  un endomorphisme. Montrer que  $f$  est orthogonale si et seulement si  $f$  transforme toute base orthonormée en une autre base orthonormée.
  - Soit  $f$  un endomorphisme. Montrer que  $f$  est orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée quelconque est orthogonale.
- (Bonus)
  - Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

- Montrer que pour  $n \neq 0$  et  $x_1, \dots, x_n > 0$  :

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq n^2$$

- En construisant le bon produit scalaire, déterminer le minimum de l'expression  $\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$ .