Kholles : 12/10/21

Robin Loris

1 Exercices

1. Discuter de la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{arctan(t)}{1+t^2}\,dt \ \ et \ \ \int_e^{+\infty} cos(t)\frac{1}{tln(t)^2}\,dt \ \ et \ \ \int_0^{+\infty} \frac{ln(t)}{sin(1/t)^2}\,dt$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in$ pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-sin(t)}{t^\alpha}\,dt$$

3. Déterminer la nature de

$$\int_0^1 \frac{sin(t)}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$$

4. (a) Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$ converge pour tout $x > 0$.

   On considère dans la suite, la fonction f sur $]0;+\infty[$, par $x \mapsto f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$

   (b) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et discuter d'un potentiel prolongement par continuité en 0.

   (c) En utilisant une majoration et e^{-t^2}, montrer que pour tout $x \geqslant 1$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}e^{-x^2}$.

   (d) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \int_x^1 \frac{1-e^{-t^2}}{t}\,dt$ a une limite finie en 0^+. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

5. On note $I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{2+cos(t)}$ et on pose $u = tan(\frac{t}{2})$.

   Vérifier que $cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et en déduire la valeur de I par changement de variable $u = tan(\frac{t}{2})$.

6. (Bonus) Calculer, après avoir justifier son existence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ln(t)}{t^2+a^2}\,dt$$

   où $a > 0$.

7. (Bonus) On considère une fonction positive et continue définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l \in]0;1[$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.