Kholles 11/01/2022

1 Exercices

1. On considère un espace euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée B. On considère u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est u, et on appelle $u*$ l'adjoint de u qui est l'endomorphisme dont la matrice dans la base B est ${}^tM$.
   (a) Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $< u(x), y > = < x, u*(y) >$
   (b) Soit v un endomorphisme de E tel que, pour tout $(x,y) \in E^2$, $< u(x), y > = < x, v(y) >$. Alors $v = u*$.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $u* = u$.
   (d) Soit F un sev de E stable par u. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par $u*$.
2. On considère E un espace euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée B. On dit que f est un endomorphisme orthogonal ssi f est un endomorphisme et pour tout $(x,y) \in E^2$, $< f(x), f(y) > = < x, y >$
   (a) Soit f un endomorphisme orthogonal, montrer que f est bijectif et que f^{-1} est également orthogonal.
   (b) Montrer que la composée de 2 endomorphismes orthogonaux est encore orthogonale.
   (c) Montrer que si f est orthogonal et symétrique alors $f^2 = Id$.
   (d) Soit f un endomorphisme. Montrer que f est orthogonale si et seulement si pour tout $x \in E$ $||f(x)|| = ||x||$
   (e) Soit f un endomorphisme. Montrer que f est orthogonale si et seulement si f transforme toute base orthonormée en une autre base orthonormée.
   (f) Soit f un endomorphisme. Montrer que f est orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée quelconque est orthogonale.
3. (Bonus)
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
   $$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$
   (b) Montrer que pour $n \neq 0$ et $x_1, ..., x_n > 0$:
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geqslant n^2$$
   (c) En construisant le bon produit scalaire, déterminer le minimum de l'expression $\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2\,dt$.