Kholles 08/03/2022

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x\left((\ln x)^2 + 2y^2\right) .$$

1. Démontrer qu'il existe dans $\mathcal{O}$ un unique point-col pour f.
2. La fonction f admet-elle sur $\mathcal{O}$ un maximum global ? un minimum global ?

---

1. Question de cours

   Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^n$.
   Donner la définition des dérivées directionnelles, première et seconde, de f en un point x de Ω dans la direction $h = (h_1, \ldots, h_n)$.
   Exprimer leurs valeurs en fonction du gradient $\nabla(f)(x)$ et de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x)$ de la fonction f au point x.

2. Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi, admettant chacune une espérance et un écart-type, notés respectivement μ et σ.

   Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E\Big(\big(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i - \mu\big)^2\Big)$.

   a) Justifier l'égalité : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \mu^2 \big(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\big)^2$.

   b) Justifier, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité : $\quad \big(\sum_{i=1}^{n} x_i\big)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$.

   c) En déduire le minimum de f sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

3. a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et trouver son unique point critique a.

   b) Justifier l'égalité :

   $$f(a + h) = f(a) + 2\int_0^1 (1 - t)\Big(\mu^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i\, h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {h_i}^2\Big)\, \mathrm{d}t .$$

   c) En déduire que f admet un minimum global en a.