Kholles 08/02/2022

1 Exercices

1. Pour chacune des fonctions suivantes, justifier que f est C^1 et donner le gradient de f :
   - La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+z^2}{1+y^2}$
   - La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = \dfrac{xz^2}{e^x+e^y}$
   - La fonction f est définie sur $(\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{R}$ par $f(x,y,z) = \dfrac{exp(z^2)}{xy}$
2. Soit A la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $A(x,y) = 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3$. Étudier les extremums de A (on pourra regarder le signe de $A(x,x)$ et de $A(x,-x)$).
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = 8(xy-z)(xz-y)(yz-x)$.
   Déterminer que $(1/2,1/2,1/2)$ est un point critique de f.
   Étudier la Hessienne de f en ce point par l'expression de la forme quadratique et conclure (on pourra utilisé le développement de $3(x-1/3y-1/3z)^2 + 8/3(y-1/2z)^2 + 2z^2$).
   Reprendre la question précédente en utilisant les valeurs propres.
4. On considère la fonction f définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ par $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{4x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{9x_3}$.
   Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1 et 2. Justifier que pour tout $A \in]0;+\infty[^3$ et $H \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, non nulle, ${}^tH\nabla f(A)H > 0$
   Conclure sur les extremums de f.

5. (bonus) On désigne par α un réel strictement positif et on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$,à valeur dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
   (a) On suppose que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et pour tout réel $t > 0$, $f(tu) = t^\alpha f(u)$ (on dit que f est homogène de degré α).
      i. Soit $u = (u_1,...,u_n)$ fixé dans $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction g sur $]0;+\infty[$ par $g(t) = f(tu)$.
      Justifier la dérivabilité de g sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $t > 0$, exprimer $g'(t)$ à l'aide des dérivées partielle de f.
      ii. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a : $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i \dfrac{df}{dx_i}(u) = \alpha f(u)$
   (b) On ne suppose que f est homogène mais on suppose désormais que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a :
   $$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{df}{dx_i}(u) = \alpha f(u)$$
   Pour tout $u = (u_1,...,u_n)$ fixé dans $\mathbb{R}^n$ on définie la fnction h sur $]0;+\infty[$ par
   $$\forall t \in]0;+\infty[\ h(t) = f(tu) - t^\alpha f(u)$$
      i. Montrer que pour tout réel $t > 0$, $h't) = \dfrac{\alpha}{t}h(t)$
      ii. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{h(t)}{t^\alpha}$ est constante sur $]0;+\infty[$ et puis que h est nulle sur $]0;+\infty[$
      iii. Conclure.