Kholles 07/03/2022

1 Questions de cours

Donner en démontrant, la formule sur le rayon de convergence d'une somme et d'un produit de Cauchy d'une série entière.

2 Exercices

1. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :
   (a) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$
   (b) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{ln(n)}{n^2} z^n$
   (c) $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n$
2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$. De même avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$
3. Former le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
4. Soit α un irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{sin(n\pi\alpha)}$$
   (a) Démontrer que $R_\alpha \leqslant 1$.
   (b) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (u_n)^{u_n}$.
   Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$
   En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.
   Dans la suite, on pose
$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$
   et on admet que α est irrationnel.
   (c) Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$
   (d) Démontrer que $R_\alpha = 0$
   (e) Démontrer que α est effectivement irrationnel.
5. (BONUS) Soit (a_n) une suite de réels stric positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose que $S_n \to +\infty$ et $\frac{a_n}{S_n} \to 0$.
   Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.