Kholles 28/09/2021

1 Exercices

1. Donner une condition uneécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable (u endormorphisme).
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.
3. Notons : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) i. Calculer A^2 et A^3.
      ii. En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 comme unique valeur propre.
      iii. En déterminant une base de V_0 : est ce que A est diagonalisable ?
   (b) Pour tout a, on note $M(a) = I + 2aA + 2a^2A^2$ et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.
      i. Calculer pour tout couple de réels (a,b), le produit $M(a)M(b)$ et vérifier que celui-ci est dans E.
      ii. En déduire que $M(a)$ st inversible et déterminer son inverse.
   (c) On pose $a \neq 0$.
      i. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.
      ii. Calculer $(M(a) - I)^3$.
      iii. La matrice $M(a)$ est elle diagonalisable ?
4. On considère 2 endomorphismes u et v qui commutent sur une espace vectoriel E. Montrer que $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont stables par v et discuter de la réciproque.
5. (bonus) : Soit $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i;j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui vérifier $\forall i \in [[1,n]]$, $|a_{i,i} > \sum_{j=1\,,\,j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$.

   Montrer que A est inversible.