Kholles ECS 2, B : 21/09/2021

Robin Loris

1 Exercices

1. On considère : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = e^{-x}$. Soit E le sous espace de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ et d l'application qui à tout élément de E associe sa dérivée.
   (a) Vérifier que B est une base de E.
   (b) Montrer que d est un endomorphisme de E
   (c) Donner la matrice A de d dans la base B.
2. (Cours) : Donner la formule de Grassman sur la dimension de la somme de 2 ev.
3. On considère $n \geqslant 2$ et I la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que tr(la trace) est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer son image.
   (b) En déduire la dimension de $ker(tr)$.
   (c) Établir que : $M_n(\mathbb{R}) = Ker(tr) + Vect(I)$.
4. Soit $H = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + ... + x_n = 0\}$.
   Montrer que H et $vect((1,1,...,1))$ sont en somme directe dans $\mathbb{R}^n$.
5. (Bonus) Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension fini et u un endormorphisme de E vérifiant $u^3 + u = 0$.
   — Montrer que $Im(u)$ est stable par u.
   — Pour $x \in Im(u)$, calculer $u^2(x)$.
   — Montrer que v, l'endormorphisme induit par u sur $Im(u)$ est un isomorphisme.
   — En déduire que le rang de u est pair.