Kholles 28/02/2022

1 Questions de cours

Donner en démontrant, la formule sur le rayon de convergence d'une somme et d'un produit de Cauchy d'une série entière.

2 Exercices

1. Un archer tire sur n cibles. À chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchés lors de cette tentative. Déterminer la loi de la variable $Z = X+Y$. Calculer son espérance et sa variance.
2. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :
   (a) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$
   (b) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{ln(n)}{n^2} z^n$
   (c) $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n$
3. Soit α un irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{sin(n\pi\alpha)}$$
   (a) Démontrer que $R_\alpha \leqslant 1$.
   (b) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (u_n)^{u_n}$.
   Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$
   En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.
   Dans la suite, on pose
$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$
   et on admet que α est irrationnel.
   (c) Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{C}{u_n^{u_n - 1}}$$
   (d) Démontrer que $R_\alpha = 0$
   (e) Démontrer que α est effectivement irrationnel.
4. (BONUS : demande un peu de notions de base sur l'espérance) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit S_n une VA suivant une loi binomiale de paramètres n et $x \in]0,1[$ et $X_n = \dfrac{S_n}{n}$.
Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n. On admet que

$$\forall \alpha > 0,\ \ P(|X_n - x| > \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

(b) On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose $B_n(j)(x) = E(Y_n)$.
Vérifier que $B_n(f)(x)$ est une fonction polynôme en la variable x.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et M tel que

$$|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x))P(X_n = \frac{k}{n})| \leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}$$

et

$$|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x))P(X_n = \frac{k}{n})| \leqslant \varepsilon$$

(c) Conclure sur une démonstration probabiliste du théorème de Stone Weierstrass.