

Kholles 28/03/2022

1 Exercices

1. Résoudre sur \mathbb{R} :

$$x^2 y' - y = 0$$

2. Résoudre le système différentiel suivant : $x' = x + 8y + e^t$ et $y' = 2x + y + e^{-3t}$.

3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de Rdc R . Donner celui de $\sum a_n z^{2n}$.

Si $R \neq 0$, faire de même pour $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$

4. Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$$

converge. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.

(a) Déterminer I .

(b) On pose

$$a_1 = -1 \text{ et } a_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2$$

Déterminer le domaine de définition de :

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

(c) Trouver une relation entre f et g .

(d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1^-$

(e) Donner la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow -1^+$

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites

$$\left(\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right) \text{ et } \left(\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \right)$$

(b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt$$

(on procédera par récurrence)

5.

(c) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

(d) Étudier la limite puis un équivalent de

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt \right)$$

6. Bonus : On considère l'équation différentielle.

$$(E) : y'' + \cos^2(t)y = 0$$

- (a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
- (b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant $\alpha < 0 < \beta$, $u'(\alpha) > 0$ et $u'(\beta) < 0$.
En déduire que u possède au moins un zéro dans \mathbb{R}_- et \mathbb{R}_+ .
- (c) Justifier l'existence de réels $\gamma = \max\{t < 0 \mid u(t) = 0\}$ et $\delta = \{t > 0 \mid u(t) = 0\}$.
- (d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u . En étudiant les variations de $W = uv' - u'v$, montrer que v possède un zéro dans $] \delta, \gamma [$.
- (e) Soit w une solution non nulle de (E) , démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction

$$w_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$