Kholles MP : 27/09/21
Sujet A

Robin Loris

1 Questions de cours

Énoncer et démontrer le théroème sur les séries absolument convergentes.

2 Exercices

1. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :
   (a) $\frac{n}{n^2+1}$
   (b) $\frac{ch(n)}{ch(2n)}$
   (c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
   (d) $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
2. On admet $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$
   après avoir discuter de l'existence.
3. En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer
   $$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$
4. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle strictement positive, telle que la série de terme général u_n converge. On note R_n le reste d'ordre n de la série.
   Étudier la nature des séries de termes généraux $\frac{u_n}{R_n}$ et $\frac{u_n}{R_{n-1}}$.
5. (Bonus) On note a_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier $n \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ y-a-t-il convergence de la série
   $$\sum \frac{x^{a_n}}{n^3}$$