Kholles 24/01/2022

1 Questions de cours

Énoncer et démontrer le lien entre matrice de passage et matrice orthogonale.

2 Exercices

1. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a,b) = \int_0^\pi (asin(t) + bcos(t) - t)^2 \, dt$.
   Pour quelle valeur du couple (a,b) réalise t-on la plus petit valeur possible de $I(a,b)$?
2. (Inégalité de Ptolémée)
   Soit E un espace euclidien et $||.||$ la norme associée. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{||x||^2}$.
   (a) Montrer que pour $x, y \in E \setminus \{0\}$, on a $||f(x) - f(y)|| = \dfrac{||x-y||}{||x|| \times ||y||}$.
   (b) Soient $a, b, c, d \in E$, montrer que
   $$||a-c|| \times ||b-d|| \leq ||a-b|| \times ||c-d|| + ||b-c|| \times ||a-d||$$
3. Montrer que les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orienté canonique, dont les matrices dans la base canonique sont données ci-dessous sont des endomorphismes orthogonaux, puis les reconnaître géométriquement :
   $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
4. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ non nul tel que les projections orthogonales de $e_1, ..., e_n$ sur $Vect(u)$ aient la même norme.
   (b) Montrer que cette norme commune est indépendante du choix du vecteur u er l'exprimer en fonction de $||e_1||, ||e_2||, ..., ||e_n||$.
5. (BONUS) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) aux matrices colonnes associées. On munit $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{R}^n$) du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = ^t XY$ et on note $||.||$ la norme associée aussi bien dans $\mathbb{R}^m$ que dans $\mathbb{R}^n$.
   On se donne $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^m$. On pose $E = \{||AX - B||^2, X \in \mathbb{R}^n\}$ et $K = inf(E)$.
   (a) Justifier l'existence de K.
   (b) On considère le système linéaire $(S) : AX = B$. On appelle pseudo-solution de S tout élément Y de $\mathbb{R}^n$ tel que $||AY - B||^2 = K$. Montrer que si (S) admet une solution, les pseudo-solutions de (S) sont les solutions de (S).
   (c) On associe à (S) le système $(S') : {}^tAAX = ^t AB$. Montrer qu'un élément Y de $\mathbb{R}^n$ est pseudo solution de (S) si et seulement si il est solution de (S').(indice : regarder $A(X-Y) + (AY - B)$).
   (d) Montrer que $rg({}^tAA) = rg(A)$
   (e) Montrer que si $rg(A) = n$ alors (S) admet une unique pseudo-solution.