Kholles 21/03/2022

1 Exercices

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$x^2y' - y = 0$$
2. Résoudre le système différenciel suivant : $x' = x + 8y + e^t$ et $y' = 2x + y + e^{-3t}$.
3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de Rdc R. Donner celui de $\sum a_n z^{2n}$.
Si $R \neq 0$, faire de même pour $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$
4. Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} ln(n) x^n$$
converge. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
   (a) Détermner I.
   (b) On pose
   $$a_1 = -1 \text{ et } a_n = -ln(1 - \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \text{ pour } n \geqslant 2$$
   Déterminer le domaine de définition de :
   $$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$
   (c) Trouver une relation entre f et g.
   (d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$
   (e) Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to -1^+$
5. (a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a\,;b], \mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites
   $$\left(\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \text{ et } \left(\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$
   (b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$
   (on procédera par récurrence)
   (c) En déduire
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
   (d) Étudier la limite puis un équivalent de
   $$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$
6. Bonus : On considère l'équation différentielle.
$$(E) : y'' + cos^2(t)y = 0$$

(a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

(b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant $\alpha < 0 < \beta$, $u'(\alpha) > 0$ et $u'(\beta) < 0$.
En déduire que u possède au moins un séro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Justifier l'existence de réels $\gamma = max\{t < 0|\, u(t) = 0\}$ et $\delta = \{t > 0|\, ut) = 0\}$.

(d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u. En étudiant les variations de $W = uv' - u'v$, montrer que v possède un zéro dans $]\delta, \gamma[$.

(e) Soit w une solution non nulle de (E), démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction

$$w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$