

Kholles 17/01/2022

1 Questions de cours

Énoncer et démontrer le lien entre matrice de passage et matrice orthogonale.

2 Exercices

1. Montrer que les endomorphismes de \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne orienté canonique, dont les matrices dans la base canonique sont données ci-dessous sont des endomorphismes orthogonaux, puis les reconnaître géométriquement :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a, b) = \int_0^\pi (a \sin(t) + b \cos(t) - t)^2 dt$.
Pour quelle valeur du couple (a, b) réalise t-on la plus petit valeur possible de $I(a, b)$?
3. On considère \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique, et (e_1, e_2, \dots, e_n) une base orthogonale de \mathbb{R}^n .
- (a) Montrer qu'il existe un vecteur u de \mathbb{R}^n non nul tel que les projections orthogonales de e_1, \dots, e_n sur $\text{Vect}(u)$ aient la même norme.
- (b) Montrer que cette norme commune est indépendante du choix du vecteur u et l'exprimer en fonction de $\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_n\|$.
4. (Inégalité de Ptolémée)

Soit E un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$.

- (a) Montrer que pour $x, y \in E \setminus \{0\}$, on a $\|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \times \|y\|}$.
- (b) Soient $a, b, c, d \in E$, montrer que

$$\|a - c\| \times \|b - d\| \leq \|a - b\| \times \|c - d\| + \|b - c\| \times \|a - d\|$$

5. (BONUS) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On identifie les vecteurs de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^m) aux matrices colonnes associées. On munit \mathbb{R}^m (resp. \mathbb{R}^n) du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée aussi bien dans \mathbb{R}^m que dans \mathbb{R}^n . On se donne $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^m$. On pose $E = \{\|AX - B\|^2, X \in \mathbb{R}^n\}$ et $K = \inf(E)$.
- (a) Justifier l'existence de K .
- (b) On considère le système linéaire $(S) : AX = B$. On appelle pseudo-solution de S tout élément Y de \mathbb{R}^n tel que $\|AY - B\|^2 = K$. Montrer que si (S) admet une solution, les pseudo-solutions de (S) sont les solutions de (S) .
- (c) On associe à (S) le système $(S') : {}^tAAX = {}^tAB$. Montrer qu'un élément Y de \mathbb{R}^n est pseudo solution de (S) si et seulement si il est solution de (S') . (indice : regarder $A(X - Y) + (AY - B)$).
- (d) Montrer que $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$
- (e) Montrer que si $\text{rg}(A) = n$ alors (S) admet une unique pseudo-solution.