Kholles 14/01/2022

1 Exercices

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$x^2y' - y = 0$$

2. Résoudre sur $]0, pi[$,
$$y'' + y = cot(x)$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Calculer e^A

4. Résoudre le système différenciel suivant : $x' = x + 8y + e^t$ et $y' = 2x + y + e^{-3t}$.

5. Bonus : On considère l'équation différentielle.
$$(E) : y'' + cos^2(t)y = 0$$

   (a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

   (b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant $\alpha < 0 < \beta$, $u'(\alpha) > 0$ et $u'(\beta) < 0$.
   En déduire que u possède au moins un séro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Justifier l'existence de réels $\gamma = max\{t < 0 | \, u(t) = 0\}$ et $\delta = \{t > 0 | \, ut) = 0\}$.

   (d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u. En étudiant les variations de $W = uv' - u'v$, montrer que v possède un zéro dans $]\delta, \gamma[$.

   (e) Soit w une solution non nulle de (E), démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction
$$w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$