Kholles 13/12/21

1 Question de cours :

Donner et démontrer la formule de Grassman.

2 Exercices

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (a) $dim(E)$ est paire.
   (b) Il existe $f \in L(E)$ telle que $Ker(f) = Im(f)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $i \in [[0;n]]$, on note $F_i = \{P \in E | \forall j \in [[0;n]] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$. Montrer que les F_i sont en somme directe dans E pour $i \in [[0;n]]$
3. En regardant les matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, montrer que l'ensemble des entiers qui sont sommes de 2 entiers carrés est stable par produit.
4. Soit A un matrice antisymétrique d'ordre $2n+1$. Montrer que $det(A) = 0$. Ce résultat est il vraie si l'ordre est pair.
5. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $det(A) \in \mathbb{R}$.
6. Soient F, G, F', G' des sous espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Montrer que :
$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$$
7. (BONUS)
   (a) Soit f et g 2 applications d'un espace vectoriel E de dimension finie vers un espace vectoriel F de dimension finie. Montrer que :
$$|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$$
   (b) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. (On montrera l'existence des objets étudiés rapidement, puis on pourra étudier la suite de matrices $(A^k + A^{-k})_k$)