Kholles MP 10/01/2022

1 Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème de Cayley Hamilton (cas réel).

2 Exercices

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont elles semblables dans $\mathbb{C}$?
2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$.
   (a) On regarde dans $\mathbb{C}$, est ce que A est diagonalisable ? Même question avec $\mathbb{R}$.
   (b) Reprendre la question précédente avec B.
3. Soient $n \geqslant 3$ et
$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ 1 & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & 1 \\ 1 & (0) & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$
   (a) Calculer les rangs de A et A^2.
   (b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par la matrice A. Montrer
$$Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n$$
   (c) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \dots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & B \end{pmatrix} \; avec\ B \in GL_2(\mathbb{R})$$
   (d) Calculer $tr(B)$ et $tr(B^2)$ En déduire les valeurs propres de B et puis celles de A.
   (e) Est ce que A est diagonalisable ?
4. (Bonus) Dans $\mathbb{C}$, montrer que la matrice suivante est diagonalisable :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & & \\ & n-1 & 0 & \dots & & \\ & \dots & \dots & \dots & n-1 & \\ & & & 2 & 0 & n \\ (0) & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   en regardant un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.