

Kholles 04/04/2022

1 Exercices

1. Donner précisément le théorème de convergence dominée (le premier).
2. On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt) dt$$

Quel est le domaine de définition réel I de F ? Justifier que F est $C^1(I)$, puis exprimer $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

3. Montrer

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos(x)} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(n!)^2}$$

4. (Bonus) Soient $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$$