

Kholles MPSI 19/09/2022, sujet A

1 Question de cours

Démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

2 Exercices

Exercice 1. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2n-1}{(n+1)!} + \frac{3}{(n+1)} \times v_n$

1. Calculer v_2 .
2. Soit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = n!v_n + n$. Montrer que (w_n) est géométrique. Calculer w_n en fonction de n puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3^{n+1} - n}{n!}$.

Exercice 2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$:

1. $C_1 = \sum_{k=0}^{2n} |n-k|$
2. $\prod_{k=1}^n ke^{-2k}$

Exercice 3. Soit $k \leq n$. Calculer :

1. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{n}{i} j$
2. $\sum_{j=0}^m \binom{n+j}{k}$ en faisant apparaître une somme télescopique.

Exercice 4. En raisonnant par analyse synthèse, trouver tous les réels x tel que $x^{n+2} \leq x^{n+1} + x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Une question de recherche

Exercice 5. Soient A, B deux parties de E . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $A \cap X = B$ admette des solutions : dans ce cas, trouvez toutes les solutions.