Kholles 29/03/2022

1 Exercices

1. Echauffement : Soit T une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée de variance σ^2 avec $\sigma \neq 0$. Pour pour tout $n \geqslant 2$, on dispose d'un échantillon indépendant $(T_1, ..., T_n)$ de T.

   Montrer que le risque quadratique de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{T_i^2}{n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (on admettra que T^2 possède une variance).

2. Oral HEC :

   1. Question de cours : définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

   Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on considère une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes telles que pour chaque épreuve, la probabilité de succès est égale à $\dfrac{1}{n}$.

   On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   On note X_n la variable aléatoire égale au rang du premier succès et Y_n, la variable aléatoire égale au rang du deuxième succès.

   On pose : $U_n = \dfrac{X_n}{n}$ et $W_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

   2. Dans cette question, l'entier n est fixé.

   a) Déterminer la loi de X_n.

   b) Déterminer la fonction de répartition de U_n.

   3. Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité U dont on déterminera une densité.

   4. Écrire un programme en *Scilab* simulant la variable aléatoire U_n.

   5.a) Déterminer la loi de Y_n.

   b) Déterminer la fonction de répartition de W_n.

   c) Soit q un réel vérifiant $0 < q < 1$ et $N \in \mathbf{N}^*$. Établir la relation : $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} j\, q^{j-1} = \frac{1 - N(1-q)\, q^N - q^N}{(1-q)^2}$.

   d) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité W dont on déterminera une densité.

3. (Bonus)

   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{-n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}$.

   On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1 et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

   1. Donner la loi de S_n, ainsi que son espérance et sa variance.

   2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la variable aléatoire S_n.

   3. En déduire, en appliquant le théorème de la limite centrée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.