Kholles 25/01/2022

1 Exercices

1. Soit f l'application définie pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$.
   (a) Montrer que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. On notera désormais $f(x,y) =< x,y >$.
   (b) Montrer que $e_1 = (1,1,1)$ et $e_2 = (-3,-2,3)$ forment une famille orthonormée pour ce produit scalaire. Comparer avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2[X]$, on considère l'application g définie par $g(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Montrer que g est un produit scalaire. On notera alors $g(P,Q) =< P,Q >$.
   Calculer $< X^i, X^j >$ pour $i, j \in [[0,2]]$. En déduire que la famille $(1, X, X^2 - \frac{2}{3})$ est orthogonale.
   Montrer que $F = Vect(1+X, 1-X)$ et $G = Vect(X - X^2)$ sont orthogonaux.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose $\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ pour $P,Q \in E$.
   (a) Montrer que si $P \in E$ admet un racine d'ordre $n+1$ alors P est nul. En déduire que ϕ est un produit scalaire.
   (b) On note, $\forall i \in \mathbb{R}$, $P_i = (X-a)^i$. Montre que $\{P_0, \dots, P_n\}$ est une base orthogonale de E. En déduire une base orthogonale de E.
   (c) Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base à l'aide des dérivées successives de P en a. En déduire la formule de Taylor pour les polynôme.
4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres et les espaces propres de A.
   Déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PD^tP$.
5. (Bonus)
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
   $$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$
   (b) Montrer que pour $n \neq 0$ et $x_1, \dots, x_n > 0$:
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geqslant n^2$$
   (c) En construisant le bon produit scalaire, déterminer le minimum de l'expression $\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2\,dt$.